Про моногенні функції, визначені в різних комутативних алгебрах

Віталій Шпаківський

1 березня 2018

I. Вступ

Напевно першим хто використав аналітичні функції, що приймають значення в комутативній алгебрі для побудови розв'язків тривимірного рівняння Лапласа був П. Кетчум. Він показав, що кожна аналітична функція $\Phi(\zeta)$ змінної $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ задовольняє тривимірне рівняння Лапласа, якщо лінійно незалежні елементи e_1, e_2, e_3 комутативної алгебри задовольняють умову

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0\,, \tag{1}$$

оскільки

$$\Delta_3\Phi := \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \equiv \Phi''(\zeta)\ (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 0\,, \tag{2}$$

де $\Phi'' := (\Phi')'$ і $\Phi'(\zeta)$ визначається рівністю $d\Phi = \Phi'(\zeta)d\zeta$.

Узагальнюючи П. Кетчума, М. Рошкулець використовував аналітичні функції зі значеннями в комутативних алгебрах для дослідження рівнянь вигляду

$$\mathcal{L}_N U(x,y,z) := \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\,\frac{\partial^N U}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma} = 0, \quad C_{\alpha,\beta,\gamma} \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Розглядаючи змінну $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ і аналітичну функцію $\Phi(\zeta)$, отримуємо наступну рівність для мішаної похідної:

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}\Phi}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma} = e_1^\alpha\, e_2^\beta\, e_3^\gamma\, \Phi^{(\alpha+\beta+\gamma)}(\zeta) = e_1^\alpha\, e_2^\beta\, e_3^\gamma\, \Phi^{(N)}(\zeta). \tag{4}$$

Підставляючи (4) в рівняння (3), маємо рівність

$$\mathcal{L}_N\Phi(\zeta) = \Phi^{(N)}(\zeta) \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, e_1^\alpha\, e_2^\beta\, e_3^\gamma\,.$$

Приходимо до висновку, що для виконання рівності $\mathcal{L}_N\Phi(\zeta) = 0$ елементи алгебри $e_1 = 1, e_2, e_3$ мають задовольняти *характеристичне рівняння*

$$\mathcal{X}(1, e_2, e_3) := \sum_{\alpha+\beta+\gamma=N} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, e_2^{\beta}\, e_3^{\gamma} = 0\,. \tag{5}$$

Якщо ліву частину рівняння (5) розкласти за базисом алгебри, то характеристичне рівняння (5) рівносильне *характеристичній системі рівнянь*, породженій рівнянням (5).

Таким чином, при виконання умови (5) кожна аналітична функція Φ зі значеннями в довільній комутативній асоціативній алгебрі задовольняє рівняння (3), і, відповідно, усі дійснозначні компоненти функції Φ є розв'язками рівняння (3).

І. Мельниченко запропонував розглядати в рівностях (2) і (4) функції Φ, двічі диференційовні за Гато, при цьому описав усі базиси $\{e_1, e_2, e_3\}$ тривимірних комутативних алгебр з одиницею над полем $\mathbb{C}$, які задовольняють рівність (1).

Для цих тривимірних комутативних алгебр, асоційованих з тривимірним рівнянням Лапласа, в роботах С. Плакси з його учнями отримано конструктивний опис усіх моногенних (тобто неперервних і диференційовних за Гато) функцій за допомогою трьох відповідних голоморфних функцій комплексної змінної.

В роботі С. Плакси і В. Шпаківського встановлено конструктивний опис моногенних функцій (зв'язаних з рівнянням $\Delta_3\Phi = 0$) зі значеннями в деяких n-вимірних комутативних алгебрах за допомогою відповідних n голоморфних функцій комплексної змінної і, спираючись на одержані представлення моногенних функцій, доведено аналоги ряду класичних результатів комплексного аналізу.

Нарешті в роботі В. Шпаківського (2016) отримано конструктивний опис моногенних функцій (зв'язаних з рівнянням (3)) зі значеннями в довільній комутативній асоціативній алгебрі над полем $\mathbb{C}$ за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної.

2. Алгебра $\mathbb{A}_n^m$

Нехай $\mathbb{A}_n^m$ — довільна комутативна асоціативна алгебра з одиницею над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Е. Картан довів, що в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ існує базис $\{I_k\}_{k=1}^{n}$, який задовольняє наступні правила множення:

Commutative associative algebra over $\mathbb{C}$

$\cdot$	I_1	I_2	$\ldots$	I_m	I_{m+1}	I_{m+2}	$\ldots$	I_n
I_1	I_1	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	I_n
I_2	0	I_2	$\cdots$	0	I_{m+1}	0	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
I_m	0	0	$\ldots$	I_m	0	I_{m+2}	$\ldots$	0
I_{m+1}	0	I_{m+1}	$\cdots$	0	$\sum\limits_{k=m+2}^{n} \Upsilon_{m+1,k}^{m+1} I_k$	$\sum\limits_{k=m+3}^{n} \Upsilon_{m+2,k}^{m+1} I_k$	$\cdots$	0
I_{m+2}	0	0	$\cdots$	I_{m+2}	$\sum\limits_{k=m+3}^{n} \Upsilon_{m+2,k}^{m+1} I_k$	$\sum\limits_{k=m+3}^{n} \Upsilon_{m+2,k}^{m+2} I_k$	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
I_n	I_n	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0

$$\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N.$$

Теорема A (В. Шпаківський, 2016). *Нехай область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ є опуклою в напрямку прямих L_u і $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$. Тоді кожна моногенна функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{u=1}^{m} I_u \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_u} F_u(t)(t-\zeta)^{-1}\, dt + \sum_{s=m+1}^{n} I_s \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{u_s}} G_s(t)(t-\zeta)^{-1}\, dt,$$

де F_u — деяка голоморфна функція в області D_u і G_s — деяка голоморфна функція в області D_{u_s}, а Γ_q — замкнена жорданова спрямлювана крива, яка лежить в області D_q, охоплює точку ξ_q і не містить точок ξ_ℓ, $\ell = 1, 2, \ldots, m$, $\ell \neq q$.

Оскільки за умов теореми **A** кожна моногенна функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ продовжується до функції, моногенної в області

$$\Pi_\zeta := \{\zeta \in E_3 : f_u(\zeta) = D_u\,,\ u = 1, 2, \ldots, m\},$$

то надалі будемо розглядати моногенні функції Φ, визначені в областях виду Π_ζ.

$$\Phi(\zeta) = \sum_{u=1}^{m} F_u(\xi_u) I_u + \sum_{s=m+1}^{n} \sum_{k=2}^{s-m+1} \frac{1}{(k-1)!} Q_{k,s} F_{u_s}^{(k-1)}(\xi_{u_s})\, I_s +$$

$$+ \sum_{q=m+1}^{n} G_q(\xi_{u_q}) I_q + \sum_{q=m+1}^{n} \sum_{s=m+1}^{n} \sum_{k=2}^{s-m+1} \frac{1}{(k-1)!} Q_{k,s} G_q^{(k-1)}(\xi_{u_q})\, I_q\, I_s\,.$$

Питання. *Як співвідносяться між собою моногенні функції, що визначені в різних алгебрах? В яких алгебрах ми "ловимо" більше розв'язків рівняння (3), а в яких менше? Чи не достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій у алгебрах певного виду?*

Теорема 1. (2018). *Нехай в алгебрі $\mathbb{A}_n^m = S \oplus_s N$ існує трійка лінійно незалежних над $\mathbb{R}$ векторів $1, e_2, e_3$, які* *задовольняють характеристичне рівняння (5) і нехай* $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ *при всіх* $u = 1, 2, \ldots, m$. *Крім того, нехай функція* $\Phi : \Pi_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ *змінної* $\zeta = x + ye_2 + ze_3$ *моногенна в області* $\Pi_\zeta \subset E_3$. *Тоді в алгебрі* $\mathbb{A}^1_{n-m+1} = 1 \oplus_s N$ *(де нільпотентна підалгебра* N *та ж сама що й в алгебрі* $\mathbb{A}_n^m$*) для кожного* $u \in \{1, 2, \ldots, m\}$ *існує трійка векторів* $1, \widetilde{e}_2(u), \widetilde{e}_3(u)$, *яка задовольняє характеристичне рівняння* $\boldsymbol{\mathcal{X}}(1, \widetilde{e}_2(u), \widetilde{e}_3(u)) = 0$ *і існує функція* $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}(u)} \to \mathbb{A}^1_{n-m+1}$ *змінної* $\widetilde{\zeta}(u)$, *яка моногенна в циліндрі*

$$\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\zeta}(u)} = \left\{ \widetilde{\zeta}(u) \in \widetilde{E}_3(u) \, : \, I_u \, \widetilde{\zeta}(u) = \zeta_u \, , \, \zeta_u \in \Pi_\zeta(u) \right\}$$

така, що

$$\Phi_u(\zeta) = I_u \, \widetilde{\Phi}\big(\widetilde{\zeta}(u)\big).$$

==

Алгебра $\mathbb{A}^1_{n-m+1} = 1 \oplus_s N$.

$\cdot$	1	I_{m+1}	I_{m+2}	$\ldots$	I_n
1	1	I_{m+1}	I_{m+2}	$\ldots$	0
I_{m+1}	I_{m+1}	$\sum\limits_{k=m+2}^{n} \Upsilon^{m+1}_{m+1,k} I_k$	$\sum\limits_{k=m+3}^{n} \Upsilon^{m+1}_{m+2,k} I_k$	$\cdots$	0
I_{m+2}	I_{m+2}	$\sum\limits_{k=m+3}^{n} \Upsilon^{m+1}_{m+2,k} I_k$	$\sum\limits_{k=m+3}^{n} \Upsilon^{m+2}_{m+2,k} I_k$	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
I_n	I_n	0	$\cdots$	$\cdots$	0

Зауваження. *Теорема 1 стверджує, що для побудови розв'язків диференціального рівняння (3) у вигляді компонент моногенних функцій зі значеннями в комутативних алгебрах, достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в алгебрах з базисом* $\{1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$, *де* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ *— нільпотенти.*

розмірність	заг. к-ть алгебр	достатньо вивч.
2	2	1
3	4	2
4	9	4
5	25	9
6	?	25
7	∞	∞

Теорема 2. (2018). *У кожній алгебрі виду* $\mathbb{A}^1_{n-m+1} = 1 \oplus_s N$ *будь-яке характеристичне рівняння вигляду (5) має розв'язки.*

Теорема 3. (2018). $\mathbb{A}_2 \subset \mathbb{A}_3 \subset \mathbb{A}_4 \subset \mathbb{A}_5 \subset \mathbb{A}_6$

$$\Phi_m = \Phi_{m+1}|_{I_{m+1}=0} \,.$$

Наслідок. *Достатньо вивчати моногенні функції в шестивимірних алгебрах виду* $1 \oplus_s N$.

Дякую за увагу!